数理解析研究所講究録 1212 巻 2001 年 133-143

Milnor algebra に付随した Holonomic 系について

田島慎一 新潟大学工学部情報工学科
(Shinichi TAJIIMA, Niigata University)
中村弥生 お茶の水女子大学大学院
(Yayoi NAKAMURA, Ochanomizu University)

1 序

X を, n 次元アフィン空間 $\mathbf{C}^n$ の原点 $O=(0,\ldots,0)$ の開近傍とする. X 上の正則関数 $f(z)=f(z_1,\ldots,z_n)$ が, 原点 $O=(0,\ldots,0)$ に孤立特異点を持つとする. f_i を, 変数 z_i による f の導関数 $f_i=\partial f/\partial z_i$ とし, $f_1,\ldots,f_n$ が $\mathcal{O}_{X,O}$ 上で生成するイデアルを I_O と置く:

$$I_O=\mathcal{O}_{X,O}\langle f_1,\ldots,f_n\rangle_O.$$

原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー類 $\eta\in\mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X)$ であり, イデアル I_O により annihilate されるもの全体を

$$\Sigma=\{\eta\in\mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X)\mid g\eta=0,^\forall g\in I_O\}$$

と置く. ここで, 層 Σ は, $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X,O}}^n(\mathcal{O}_{X,O}/I_O,\mathcal{O}_{X,O})$ と同型である. 今, $\Omega_{X,O}/I_O\Omega_{X,O}$ と $\mathcal{O}_{X,O}/I_O$ を同一視すれば, Grothendieck local residue が定める pairing

$$\Omega_{X,O}/I_O\Omega_{X,O}\times\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X,O}}^n(\mathcal{O}_{X,O}/I_O,\mathcal{O}_{X,O})\to\mathbf{C}$$

が非退化であることから, Σ は, Gorenstein Artin 環 $\mathcal{O}_{X,O}/I_O$ のベクトル空間としての双対空間とみなすことができる.

本稿では, Σ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元となる代数的局所コホモロジー類 σ に対し, σ を annihilate する高々 1 階の微分作用素によって与えられる holonomic 系の解空間について調べる.

2 Σ 上に作用する微分作用素の性質

代数的局所コホモロジー類のなす集合 $\Sigma=\{\eta\in\mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X)\mid g\eta=0,^\forall g\in I_O\}$ は, 適当な代数的局所コホモロジー類 $\sigma\in\Sigma$ を選ぶことにより, $\Sigma=\mathcal{O}_{X,O}\sigma$ と表すことができる. このような σ を一つ取り, σ を annihilate する 1 階の線形偏微分作用素を P と置く. このとき, 微分作用素 P は, 次の性質を満たす.

補題 1 σ を *annihilate* する 1 階の微分作用素 P は, Σ 上に作用する. つまり, $P\sigma=0$ ならば, $P(\Sigma)\subseteq\Sigma$ が成り立つ.

証明 代数的局所コホモロジー類 σ は Σ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元であるから, 任意の $\eta\in\Sigma$ は, 適当な関数 $h\in\mathcal{O}_{X,O}$ を用いて $\eta=h\sigma$ と表すことができる. σ の annihilator $P=\sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial}{\partial z_j}+a_0$ の 1 階部分を

$P^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ とおく. 今, P を代数的局所コホモロジー類 η に施すと,

$$\begin{aligned} P(\eta) &= P(h\sigma) \\ &= (Ph - hP)\sigma + hP\sigma \\ &= P^{(1)}(h)\sigma \in \Sigma \end{aligned}$$

となり, $P(\Sigma) \subseteq \Sigma$ を得る. □

補題の証明からも明らかなように, 1 階の微分作用素 R が Σ に作用する条件は, その 1 階の部分 $R^{(1)}$ のみで決まる. このことに注目して, Σ 上に作用する 1 階の微分作用素で 0 階項がないもの全体のなす集合を D_Σ とおく. D_Σ は明らかに

$$D_\Sigma = \{v = \sum_{j=1}^n a_j \partial/\partial z_j \mid v(g) \in I_O, {}^\forall g \in I_O\}$$

と表すことができる. また, D_Σ に属する作用素 v は, $\mathcal{O}_{X,O}/I_O$ 上の線形作用素

$$\bar{v} : \mathcal{O}_{X,O}/I_O \to \mathcal{O}_{X,O}/I_O$$

を誘導する. 混乱の恐れがないと思うので, 以下, この $\bar{v}$ も v で表すことにする. さて, D_Σ に対し, 次が成り立つ.

補題 2 Σ 上に作用する微分作用素 $v \in D_\Sigma$ に対し, 適当な $a_0 \in \mathcal{O}_{X,O} \subset \mathcal{D}_X$ を取ると, $(v + a_0)\sigma = 0$ が成り立つ.

証明 $v \in D_\Sigma$ より, $v\sigma \in \Sigma$ である. 従って, 適当な正則関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ を用いて, $v\sigma = h\sigma$ と表すことができる. よって, $a_0 = -h$ とおけば, $(v + a_0)\sigma = 0$ が成り立つ. □

次に, σ の 1 階の annihilator P に対し, $\eta \in \Sigma$ が同次微分方程式 $P(\eta) = 0$ の解となる条件について考える. 今, $\eta \in \Sigma$ を $\eta = h\sigma$ と表すと, 微分方程式

$$P(h\sigma) = 0$$

は,

$$(Ph - hP)\sigma = 0$$

と同等である. よって, $\eta = h\sigma$ が $P(\eta) = 0$ を満たす条件として, $Ph - hP \in I_O$ を得る. つまり, σ の 1 階の annihilator $P = \sum_{j=1}^n a_j \partial/\partial z_j + a_0$ に対して, $P\eta = 0$ が成り立つ条件は, 微分作用素 P の 1 階の部分が定める微分作用素 $P^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_i \partial/\partial z_j$ に対して,

$$P^{(1)}h = \sum_{j=1}^n a_i \frac{\partial h}{\partial z_j} \in I_O$$

が成り立つことである. ここで, $h \in I_O$ ならば, $h\sigma = 0$ であるから, コホモロジー類 $\eta = h\sigma$ を表す $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ としては, I_O で剰余を取った $h \mod I_O \in \mathcal{O}_{X,O}/I_0$ を考えれば十分である. 今, $P^{(1)} \in D_\Sigma$ であるので, $P^{(1)} = v$ と表す. ここで,

$$H_\Sigma = \{h \in \mathcal{O}_{X,O}/I_O \mid vh = 0 \text{ (i.e., } vh \in I_O), {}^\forall v \in D_\Sigma\}$$

とおく. $\mathcal{A}nn^{(1)}$ を, σ の高々 1 階の annihilator から生成される $\mathcal{D}_X$ 上のイデアルとする:

$$\mathcal{A}nn^{(1)} = \langle R \in \mathcal{D}_X \mid R\sigma = 0, \mathrm{ord}(R) \leq 1\rangle.$$

このとき, $\mathcal{A}nn^{(1)}$ によって決まる holonomic 系の解空間に対し, 次の定理を得る.

$$Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{h\sigma \mid h \in H_\Sigma\}.$$

この主張に用いられる H_Σ は, Σ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元 σ の取り方によらないことに注意しておく.

例 1 関数 $f = x^3 + y^7 + cxy^5$ は, 原点を E_{12} 型孤立特異点に持つ. (c は, パラメタである.) つまり, f の x に関する偏導関数 $f_x = 3x^2 + cy^5$ と, f の y に関する偏導関数 $f_y = 7y^6 + 5cxy^4$ は, 原点に重複度 12 の共通零点を持つ. $\mathcal{O}_X$ のイデアル $\langle f_x, f_y \rangle$ を原点 O に局所化した I_O は, 全次数辞書式順序 $x \succ y$ を用いて計算すると, $I_O = \langle 5cx^3 + 7y^2x^2, yx^3, x^4, 3x^2 + cy^5, 21yx^2 - 5c^2y^4x \rangle$ と表すことができる. 今, I_O で *annihilate* される代数的局所コホモロジー類全体 Σ に対し, D_Σ を計算すると, $\mathbf{C}$ 上の基底として, 次の 14 個の作用素を得ることができる. 但し, 右側の単項式はそれぞれの作用素 v に関し, $vh = 0$ を満たす関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}/I_O$ である.

$(84yx + 5c^2y^4)\partial_x + 42y^2\partial_y$	$1, x^3, (\frac{5}{84}cy - \frac{21}{5c^2})x^2 + y^3x$
$(-252yx + 35c^2y^4)\partial_x + 30cx\partial_y$	$1, x^3, -\frac{5}{49}c^2x^2 + \frac{10}{21}cy^2x + y^4, (-\frac{5}{84}cy - \frac{126}{25c^2})x^2 + y^3x$
$-25cx^2\partial_x + 14y^3\partial_y$	$1, -\frac{126}{25c^2}x + y^3, yx^2, x^3, \frac{25}{49}c^2x^2 + \frac{10}{7}cy^2x + y^4, -\frac{63}{25c^2}x^2 + y^3x$
$(5cx^2 + 7y^2x)\partial_x$	$1, y, y^2, x^2, y^3, yx^2, x^3, y^4$
$5x^2\partial_x + 2yx\partial_y$	$1, \frac{9}{14}cx^2 + y^2x, yx^2, x^3, -\frac{24}{5c^2}yx + y^4, y^3x$
$y^4\partial_y$	$1, x, x^2, \frac{15}{7}cyx + y^3, yx^2, x^3, \frac{10}{7}cy^2x + y^4, y^3x$
$y^3x\partial_x$	$1, y, y^2, x^2, y^3, yx^2, x^3, y^4, y^3x$
$y^2x\partial_y$	$1, x, x^2, y^2x, yx^2, x^3, -\frac{84}{5c^2}yx + y^4, y^3x$
$yx^2\partial_x$	$1, y, y^2, x^2, y^3, y^2x, yx^2, x^3, y^4, y^3x$
$x^2\partial_y$	$1, x, x^2, \frac{15}{7}cyx + y^3, y^2x, yx^2, x^3, y^4, y^3x$
$y^3x\partial_y$	$1, x, yx, x^2, y^2x, yx^2, x^3, y^4, y^3x$
$yx^2\partial_y$	$1, x, yx, x^2, y^3, y^2x, yx^2, x^3, y^4, y^3x$
$x^3\partial_x$	$1, y, y^2, yx, x^2, y^3, y^2x, yx^2, x^3, y^4, y^3x$
$x^3\partial_y$	$1, x, y^2, yx, x^2, y^3, y^2x, yx^2, x^3, y^4, y^3x$

よって, $H_\Sigma = \mathrm{Span}\{1, x^3\}$ を得, $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{\sigma, x^3\sigma\}$ を導くことができる. 但し, σ は Σ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の任意の生成元であり, $\mathcal{O}_{X,O}/I_O = \mathrm{Span}\{1, y, y^2, x, y^3, yx, y^4, y^2x, x^2, y^3x, yx^2, x^3\}$ の計算には, 全次数辞書式順序 $x \succ y$ を用いた. ここで, H_Σ に属する関数 x^3 は, $x^3 \equiv f \mod I_O$ であることに注意しておく.

3 擬斉次孤立特異点の場合

σ を, Σ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元であるとする. σ の $\mathcal{D}_X$ 上の annihilator 全体のなす左イデアルを $\mathcal{A}nn$ と置く. このとき, $\mathcal{A}nn$ は simple な holonomic 系であるので, 次が成り立つことが容易に分かる.

命題 1

- $\mathrm{Char}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn) = T^*_{\{O\}}X$.
- $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{\sigma\}$.

この結果を用いることにより, $\mathcal{A}nn^{(1)}$ について, 次の定理を導くことができる.

定理 2 Σ の生成元 σ の *annihilating ideal* $\mathcal{A}nn$ が, $\mathcal{A}nn^{(1)} = \mathcal{A}nn$ を満たす必要十分条件は,

$$\mathcal{O}_{X,O}\langle f, f_1, \cdots, f_n\rangle = \mathcal{O}_{X,O}\langle f_1, \cdots, f_n\rangle$$

となることである.

証明 $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ に対し, $\mathcal{O}_{X,O}\langle f, f_1, \cdots, f_n\rangle = \mathcal{O}_{X,O}\langle f_1, \cdots, f_n\rangle$ が成り立つとする. つまり, f に対し, 次を満たす正則関数 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_{X,O}$ が存在するとする;

$$\begin{aligned} f &= a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \qquad (1)\\ &= a_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \cdots + a_n \frac{\partial f}{\partial z_n}\\ &= (a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial z_n}) f. \end{aligned}$$

さて, 代数的局所コホモロジー類 σ は, $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の適当な関数 h を用いて, $\sigma = [h/f_1 \cdots f_n]$ と表すことができる. 微分作用素 $v = a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial z_n}$ を σ に作用させると,

$$\begin{aligned} v\sigma &= (a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial z_n})[\frac{h}{f_1 \cdots f_n}] \qquad (2)\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j([\frac{h_j}{f_1 \cdots f_n}] - h([\frac{-f_{1j}}{f_1^2 f_1 \cdots f_n}] + \cdots + [\frac{-f_{kj}}{f_1 \cdots f_k^2 \cdots f_n}] + \cdots + [\frac{-f_{nj}}{f_1 \cdots f_n^2}]))\\ &= [\frac{a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n}{f_1 \cdots f_n}] - h(-[\frac{a_1 f_{11} + \cdots + a_n f_{1n}}{f_1^2 f_2 \cdots f_n}] - \cdots - [\frac{a_1 f_{n1} + \cdots + a_n f_{nn}}{f_1 \cdots f_n^2}]) \qquad (3) \end{aligned}$$

となる. 但し, $f_{kj} = \partial f_k/\partial z_j$, $h_j = \partial h/\partial z_j$ と置いた. ここで, $a_{kj} = \partial a_k/\partial z_j$ と置く. (1) より, $f_j = (a_{1j} f_1 + \cdots + a_{nj} f_n) + (a_1 f_{1j} + \cdots + a_n f_{nj})$ であるから,

$$\begin{aligned} v\sigma &= [\frac{a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n}{f_1 \cdots f_n}] - h([\frac{f_1 - (a_{11} f_1 + \cdots + a_{n1} f_n)}{f_1^2 f_2 \cdots f_n}] + \cdots + [\frac{f_n - (a_{n1} f_1 + \cdots + a_{nn} f_n)}{f_1 \cdots f_n^2}])]\\ &= [\frac{a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n}{f_1 \cdots f_n}] - (n - \sum_{j=1}^{n} a_{jj})\sigma \end{aligned}$$

となる. 今, $[(a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n)/f_1 \cdots f_n] \in \Sigma$ であり, 適当な $\bar{u} \in \mathcal{O}_{X,O}/I_O$ を用いて

$$[\frac{a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n}{f_1 \cdots f_n}] = \bar{u}\sigma$$

と表すことができる. よって, $v\sigma = (\bar{u} - n + (a_{11} + \cdots + a_{nn}))\sigma$ を得る. つまり, $P = v - \bar{u} + n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})$ と置くと, 微分作用素 P は, 代数的局所コホモロジー類 σ の annihilator となる. 斎藤恭司氏により, v に対し, $\partial(a_1, \ldots, a_n)/\partial(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$ が成り立つことが示されている ([6]). よって, 命題 1 により, ホロノミック系 $\mathcal{D}_X/\langle f_1, \ldots, f_n, P\rangle$ は simple である. 今,

$$\mathcal{D}_X\langle f_1, \ldots, f_n, P\rangle \subseteq \mathcal{A}nn^{(1)} \subseteq \mathcal{A}nn$$

であるが, ホロノミック系 $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn$ は simple であることから,

$$\mathcal{D}_X\langle f_1, \ldots, f_n, P\rangle = \mathcal{A}nn^{(1)} = \mathcal{A}nn$$

次に, $f \notin \mathcal{O}_{X,O}\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ とする. このとき, 明らかに, $f\sigma \neq 0$ が成り立つ. ここで, 1 階の微分作用素 $P = \sum_{j=1}^n a_j \partial/\partial z_j + a_0$ が, σ を annihilate するとする. 関数 f 倍で定義される 0 階の微分作用素を $F = f \in \mathcal{D}_X$ と置くと,

$$\begin{aligned} P(f\sigma) &= PF\sigma \\ &= (PF - FP)\sigma + FP\sigma \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial z_j}\sigma + FP\sigma \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j f_j \sigma \end{aligned}$$

となる. $\sum_{j=1}^n a_j f_j \in \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ であるから,

$$P(f\sigma) = 0$$

を得る. よって,

$$Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X))$$

には, σ, $f\sigma$ という二つの元が存在することが分かるが, σ と $f\sigma$ が一次独立であることから,

$$\dim Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) \geq 2$$

であることが分かる. よって, holonomic 系 $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}$ は simple でないことが分かり,

$$\mathcal{A}nn^{(1)} \neq \mathcal{A}nn$$

を得る. □

今, 原点に孤立特異点を持つ関数 f について,

$$\mathcal{O}_{X,O}\langle f, f_1, \cdots, f_n\rangle = \mathcal{O}_{X,O}\langle f_1, \cdots, f_n\rangle$$

が成り立つとする. このとき, f を擬斉次多項式とするような正則な座標変換が存在する (斎藤恭司 [6]). このことと定理を組み合わせると,

$$\mathrm{Char}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}) = T^*_{\{O\}}X$$

が成り立つ必要十分条件は, f が, 原点に擬斉次な孤立特異点を持つことであると言い換えることができる. このとき,

$$Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{\sigma\}$$

が成り立つので, 擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジー類は, 高々 1 階の微分方程式系の解として特徴付けることが可能である.

例 2 関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 + cx^2y^2$ は, 原点に X_9 型の孤立特異点を持つ擬斉次多項式である. f の x に関する偏導関数 $f_1 = 4x^3 + 2cxy^2$ と, f の y に関する偏導関数 $f_2 = 4y^3 + 2cx^2y$ により *annihilate* される代数的局所コホモロジー類全体 Σ は, 9 次元のベクトル空間をなす.

この Σ に関する D_Σ を計算すると, 下表左側の 11 個の微分作用素を得る. 下表右側の単項式は, それぞれの作用素 v に関し, $vh=0$ を満たす 関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}/I_O$ を表している.

$x\partial_x + y\partial_y$	1
$yx\partial_x + y^2\partial_y$	$1, x^2+\frac{2}{c}y^2, y^2x, y^4$
$4cy^2\partial_x + (c^2-12)yx\partial_y$	$1, x^2-\frac{4c}{c^2-12}y^2, y^3, y^4$
$(c^4-24c^2+144)yx\partial_x + (4c^3-48c)x^2\partial_y$	$1, x^2+(-\frac{1}{4}c+\frac{3}{c})y^2, y^2x, y^4$
$((c^2-12)x^2-4cy^2)\partial_x$	$1, y, y^2, y^3, y^4$
$y^3\partial_y$	$1, x, yx, x^2, y^3, y^2x, y^4$
$y^3\partial_x$	$1, y, y^2, x^2, y^3, y^2x, y^4$
$y^2x\partial_y$	$1, x, y^2, x^2, y^3, y^2x, y^4$
$y^2x\partial_x$	$1, y, y^2, yx, y^3, y^2x, y^4$
$y^4\partial_y$	$1, x, y^2, yx, x^2, y^3, y^2x, y^4$
$y^4\partial_x$	$1, y, y^2, yx, x^2, y^3, y^2x, y^4$

(ここで, $\mathcal{O}_{X,O}/I_O = \mathrm{Span}\{1, y, x, y^2, yx, x^2, y^3, y^2x, y^4\}$ である.)

この計算から, $H_\Sigma = \mathrm{Span}\{1\}$ であることが分かる. よって, Σ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の任意の生成元 σ に関し,

$$Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{\sigma\}$$

を得る.

では, σ として, *Grothendieck residue symbol* $\left[\begin{array}{c}1\\ f_1f_2\end{array}\right]$ によって決まる代数的局所コホモロジー類 $[1/f_1f_2]$ を取り, 具体的に計算してみよう. 今, σ は

$$\sigma = [\frac{1}{24}\frac{-cx^4+2x^2y^2-cy^4}{cx^5y^5}]$$

と表すことができる. また, 9 次元ベクトル空間としての Σ の基底は, 次のように表すことができる.

$$[\frac{1}{xy}], [\frac{1}{x^2y}], [\frac{1}{xy^2}], [\frac{1}{xy^3}], [\frac{1}{x^2y^2}], [\frac{1}{x^3y}],$$

$$[\frac{-2y^2x^3+cy^4x}{cx^5y^5}], [\frac{-1/2cyx^4+y^3x^2}{x^5y^5}], [\frac{cx^4-2y^2x^2+cy^4}{cx^5y^5}].$$

これらのコホモロジー類は, σ を用いて, それぞれ次のように表すことができる.

$$[\frac{1}{xy}] = -24y^4\sigma, \quad [\frac{1}{x^2y}] = 12cxy^2\sigma, \quad [\frac{1}{xy^2}] = -24y^3\sigma,$$

$$[\frac{1}{xy^3}] = (\frac{-24c^2}{c^2-4}y^2 + \frac{-48c}{c^2-4}x^2)\sigma, \quad [\frac{1}{x^2y^2}] = 12cxy\sigma, \quad [\frac{1}{x^3y}] = (\frac{-48c}{c^2-4}y^2 + \frac{-24c^2}{c^2-4}x^2)\sigma,$$

$$[\frac{-2x^3y^2+cxy^4}{cx^5y^5}] = -24x\sigma, \quad [\frac{-1/2cx^4y+x^2y^3}{x^5y^5}] = 12cy\sigma, \quad [\frac{cx^4-2x^2y^2+cy^4}{cx^5y^5}] = -24\sigma.$$

今, σ の高々 1 階の *annihilator* のなすイデアルは,

$$\mathcal{A}nn^{(1)} = \langle cx^2y+2y^3, 2x^3+cxy^2, -xy^3, -y^5, x\partial_x+y\partial_y+6\rangle$$

で与えられる ([9] 参照). 作用素の形から $\mathrm{Char}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}) = T^*_{\{O\}}X$ であることが分かり, $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(1)}$ が成り立つことが分かる. ここで, $P = x\partial_x + y\partial_y + 6$ と置く. 関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}/I_O$ を取り, コホモロジー

類 $h\sigma$ に P を施すと,

$$\begin{aligned} P(h\sigma) &= (x\frac{\partial h}{\partial x}+y\frac{\partial h}{\partial y})\sigma+hP\sigma \\ &= (x\frac{\partial h}{\partial x}+y\frac{\partial h}{\partial y})\sigma \end{aligned}$$

となる. よって, h として $\mathcal{O}_{X,O}/I_O$ の単項基底 $1,y,x,y^2,yx,x^2,y^3,y^2x,y^4$ を取り, $Ph\sigma$ を計算すると, それぞれ

$$0, y\sigma, x\sigma, 2y^2\sigma, 2yx\sigma, 2x^2\sigma, 3y^3\sigma, 3y^2x\sigma, 4y^4\sigma$$

となる. このことからも, $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)},\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X))=\mathrm{Span}\{\sigma\}$ が確かめられる.

例 3 関数 $f=x^3+xy^4+y^7$ は, 原点に重複度 10 の孤立特異点を持つ. 関数 f は, この関数そのものは擬斉次多項式ではないが, 正則な座標変換を施すことにより, 擬斉次多項式となることが知られている ([6] 参照). f の x に関する偏導関数 f_x と y に関する偏導関数 f_y の生成する $\mathcal{O}_X$ 上のイデアルを原点 O に局所化することにより得られる $\mathcal{O}_{X,O}$ 上のイデアルを I_O と置く. I_O により *annihilate* される代数的局所コホモロジー類 Σ に対し, D_Σ は, 次の表の左側に与える 12 個の微分作用素を $\mathbf{C}$ 上の基底に持つ. 表の右側の単項式は, それぞれの作用素 v に関し, $vh=0$ を満たす関数 $h\in\mathcal{O}_{X,O}/I_O$ の $\mathbf{C}$ 上の基底を表す.

$((147y^2+32)x-28y^3)\partial_x+16y\partial_y$	1
$2yx\partial_x+y^2\partial_y$	$1, yx^2-\frac{5}{21}y^2x, y^3x$
$(-35y^2x+4y^3)\partial_x+4x\partial_y$	$1, yx^2, y^3x$
$yx\partial_y$	$1, x, x^2, y^2x-\frac{8}{63}y^3, yx^2, y^3x$
$2y^2x\partial_x+y^3\partial_y$	$1, x^2-\frac{16}{63}yx, y^2x, yx^2, y^3x$
$x^2\partial_x$	$1, y, y^2, y^3, x^2, yx^2, y^3x$
$y^2x\partial_y$	$1, x, yx-\frac{2}{21}y^2, y^3, x^2, y^2x, yx^2, y^3x$
$x^2\partial_y$	$1, x, yx, x^2, y^2x, yx^2, y^3x$
$y^3x\partial_x$	$1, y, y^2, yx, y^3, x^2, y^2x, yx^2, y^3x$
$yx^2\partial_x$	$1, y, y^2, y^3, x^2, y^2x, yx^2, y^3x$
$y^3x\partial_y$	$1, x, y^2, yx, y^3, x^2, y^2x, yx^2, y^3x$
$yx^2\partial_y$	$1, x, yx, y^3, x^2, y^2x, yx^2, y^3x.$

この計算から, $H_\Sigma=\mathrm{Span}\{1\}$ であることが分かり,

$$Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn(1),\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X))=\mathrm{Span}\{\sigma\}$$

を得る.

さて, Σ の生成元として, $\sigma=[1/f_xf_y]$ を取る. σ は, 次のように表すことができる.

$$\sigma=[\frac{3176523}{16384}\frac{1}{xy}-\frac{21609}{1024}\frac{1}{xy^3}+\frac{147}{64}\frac{1}{xy^5}-\frac{1}{4}\frac{1}{xy^7}-\frac{1029}{256}\frac{1}{x^2y^2}+\frac{7}{16}\frac{1}{x^2y^4}-\frac{49}{64}\frac{1}{x^3y}+\frac{1}{12}\frac{1}{x^3y^3}].$$

この σ に対する高々 1 階の *annihilator* の生成するイデアル $\mathcal{A}nn^{(1)}$ は,

$$\mathcal{A}nn^{(1)}=\langle x^3, 3x^2+y^4, 21y^2x^2-4y^3x, (16x+28y^3)\partial_x+(42x+147y^3+8y)\partial_y+882y^2+72\rangle$$

で与えられる. 1 階の微分作用素 $(16x+28y^3)\partial_x+(42x+147y^3+8y)\partial_y+882y^2+72$ の形からも, $\mathcal{A}nn=\mathcal{A}nn^{(1)}$ であることが確かめられる.

ここで, $\mathcal{A}nn=\mathcal{A}nn^{(1)}$ が成り立たない例として, 前節の例 1 に挙げた, 半擬斉次である E_{12} 型孤立特異点を, パラメタ c を 1 として, 再び取り上げる.

例 4 ([3]) 関数 $f = x^3 + xy^5 + y^7$ は 原点を E_{12} 型孤立特異点に持つ関数であった．今, Σ の $\mathcal{O}_X$ 上の生成元 σ として *Grothendieck residue symbol* $\left[\begin{array}{c} 1 \\ f_x f_y \end{array} \right]$ で与えられる代数的局所コホモロジー類

$$\begin{aligned}\sigma = [\quad & \frac{5^{15}}{3^8 7^{16}}\frac{1}{xy} - \frac{5^{13}}{3^7 7^{14}}\frac{1}{xy^2} + \frac{5^{11}}{3^6 7^{12}}\frac{1}{xy^3} - \frac{5^9}{3^5 7^{10}}\frac{1}{xy^4} + \frac{5^7}{3^4 7^8}\frac{1}{xy^5} - \frac{5^5}{3^3 7^6}\frac{1}{xy^6} + \frac{5^3}{3^2 7^4}\frac{1}{xy^7} \\ & -\frac{5}{3\cdot 7^2}\frac{1}{xy^8} - \frac{5^{10}}{3^6 7^{11}}\frac{1}{x^2y} + \frac{5^8}{3^5 7^9}\frac{1}{x^2y^2} - \frac{5^6}{3^4 7^7}\frac{1}{x^2y^3} + \frac{5^4}{3^3 7^5}\frac{1}{x^2y^4} - \frac{5^2}{3^2 7^3}\frac{1}{x^2y^5} + \frac{1}{3\cdot 7}\frac{1}{x^2y^6} \\ & +\frac{5^5}{3^5 7^6}\frac{1}{x^3y} - \frac{5^3}{3^4 7^4}\frac{1}{x^3y^2} + \frac{5}{3^3 7^2}\frac{1}{x^3y^3} - \frac{1}{3^2 7}\frac{1}{x^4y} \;].\end{aligned}$$

を取る．今, σ の高々 1 階の *annihilator* の生成する $\mathcal{D}_X$ 上のイデアル $\mathcal{A}nn^{(1)}$ は, イデアル I で定義される 0 階の微分作用素と, 2 個の 1 階の微分作用素

$$\begin{aligned} P_1 = \; & (5yx + 7y^3)\partial_y + 20x + 42y^2 \\ P_2 = \; & 470880590578020yx\partial_x + (-16817163949215x + 164808206702307y^2)\partial_y \\ & -9765625000x^3 + (-80390625000y + 236348437500)x^2 \\ & +(56273437500y^3 - 330887812500y^2 + 1945620337500y - 11440247584500)x \\ & +463242937500y^4 - 2723868472500y^3 + 16016346618300y^2 + 1930610421369882y \end{aligned}$$

で, 生成することができる．この 2 個の作用素の 1 階部分をそれぞれ v_1, v_2 と置くことにする．このとき, v_1, v_2 は $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 D_Σ を生成することが分かり, $H_\Sigma = \mathrm{Span}\{1, x^3\}$ を得ることができる．よって, $\mathrm{Char}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}) = 2 \cdot T^*_{\{O\}}X$ が成り立ち, さらに,

$$Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_{X,O})) = \mathrm{Span}\{\sigma, -\frac{1}{3^2 7}[\frac{1}{xy}]\}$$

を得る．ここで, H_Σ の非自明な関数 x^3 は, $f \mod I_0$ から来ている (*i.e.*, $x^3/7 \equiv f \mod I_0$) ことを注意しておく．なお, 微分作用素 P_1, P_2 等の具体的計算法については, [4] を参照されたい．

4　特性多様体 $\mathrm{Char}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)})$ の重複度について

この節では, 擬斉次でない場合の $\mathrm{Char}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)})$ の重複度に注目し, いくつかの場合に具体的な計算をしてみる．原点 O に孤立特異点を持つ X 上の関数 f に対し, 変数 z_j に関する偏導関数を f_j と表す．今, $\mu = \dim \mathcal{O}_{X,O}/\langle f_1, \ldots, f_n\rangle_O$ と置き, $\tau = \dim \mathcal{O}_{X,O}/\langle f, f_1, \ldots, f_n\rangle_O$ と置く．これらはそれぞれ Milnor 数, Tjurina 数と呼ばれる．前節最後の例で扱った E_{12} 型孤立特異点においては, $\mu = 12$ であり, $\tau = 11$ である．さて, E_{12} 型特異点 に関する例において,

$$\mathrm{Char}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}) = 2 \cdot T^*_O X$$

という関係を見ることができた．この関係を, μ と τ を用いて表すと,

$$\mathrm{Char}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}) = (\mu - \tau + 1) \cdot T^*_{\{O\}}X$$

となる．我々はこの結果が一般の場合にも成り立つと予想する (cf. [5])．

予想 *Char*$(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}) = (\mu - \tau + 1) \cdot T^*_{\{O\}}X$.

この予想を裏付ける例として, 次の二つの例を見よう．

例 5 (E_{18} 型孤立特異点 $x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$) E_{18} 型孤立特異点 $x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$ に関して, f の各変数 x, y に関する偏導関数 f_x, f_y の生成する $\mathcal{O}_{X,O}$ 上のイデアル I_O は, 全次数辞書式順序 $x \succ y$ によるグレブナ基底の計算により, $I_O = \langle x^4, (8by + 7a)x^3 + 10y^3x^2, y^2x^3, (3b^4y + 21ab^3)x^3 + (30ab^2y^2 -$

$30a^2by+30a^3)x^2+10a^4y^7, (-21b^2y+45ab)x^3+30ay^2x^2-7a^3y^6x\rangle$ と表すことができる．Σ に作用する 1 階の微分作用素 D_Σ は，$\mathbf{C}$ 上，次の表左側に挙げる 21 個の作用素により生成される．各作用素の右下または右側には，それぞれの作用素 v に対し，同時方程式 $vh=0$ を満たす関数
$h \in \mathcal{O}_{X,O}/I_O = \mathrm{Span}\{1, y, y^2, y^3, x, y^4, yx, y^5, y^2x, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3\}$
を与えた．

$((-18b^2y+66ab)x^2-180ay^2x-7a^3y^6)\partial_x-60ay^3\partial_y,$

$\quad\big|\ 1, ((\frac{113}{1440}b-\frac{1900}{147a^4}b^2)y^2+(\frac{7}{160}a+\frac{60}{7a^3}b)y-\frac{30}{7a^2})x^2+y^4x, ((\frac{7}{180}a+\frac{1270}{147a^3}b)y^2-\frac{30}{7a^2}y)x^2+y^5x,$
$\quad\big|\ x^3, yx^3$

$((-210b^2y+642ab)x^2+540ay^2x-77a^3y^6)\partial_x-42a^2x\partial_y$

$\quad\big|\ 1, ((-\frac{1267}{1440}b-\frac{270}{49a^4}b^2)y^2+(-\frac{2}{160}a+\frac{27}{49a^3}b)y-\frac{270}{49a^2})x^2+y^4x,$
$\quad\big|\ (-\frac{2059}{5400}b^2y^2-\frac{301}{600}bay-\frac{7}{60}a^2)x^2+\frac{7}{15}ay^3x+y^6, ((-\frac{7}{180}a+\frac{135}{28a^3})y^2-\frac{135}{28a^2}y)x^2+y^5x, x^3, yx^3$

$(63by+49a)x^2\partial_x-20y^4\partial_y,$

$\quad\big|\ 1, ((-\frac{147}{640}b^2+\frac{135}{49a^4}b^3)y-\frac{147}{640}ba-\frac{135}{98a^3}b^2)x^2+(-\frac{21}{32}by^3-\frac{75}{28ba})x+y^5+\frac{35}{64b}ay^4,$
$\quad\big|\ ((\frac{49}{160}a+\frac{240}{49a^3})y-\frac{120}{49a^2})x^2+y^4x, ((\frac{49}{100}ba-\frac{288}{49a^3}b^2)y+\frac{49}{100}a^2+\frac{144}{49a^2}b)x^2+\frac{7}{5}ay^3x+y^6,$
$\quad\big|\ -\frac{75}{28a^2}yx^2+y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$

$((-8by-7a)x^2-10y^3x)\partial_x,$

$\quad\big|\ 1, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, x^2, yx^2, y^2x^2, x^3, yx^3$

$(-by-7a)x^2\partial_x-2ayx\partial_y,$

$\quad\big|\ 1, (\frac{49}{80}by+\frac{13}{20}a)x^2+y^3x, y^5x, \frac{21}{32}ayx^2+y^4x, (\frac{5895}{2156a^3}b^2y-\frac{3096}{539a^2}b)x^2-\frac{360}{77a^2}y^2x+y^6, y^2x^2, x^3, yx^3$

$49ayx^2\partial_x-20y^5\partial_y,$

$\quad\big|\ 1, yx^2, \frac{7}{20}ax^2+(y^3+\frac{12600}{2401a^4+9600b}ay^2+\frac{2160000}{49(2401ba^5+9600b^2a)})x-\frac{9000}{2401ba^4+9600b^2}ay^4,$
$\quad\big|\ -\frac{300}{49ba}x+y^5+\frac{5}{4b}ay^4, -\frac{120}{49a^2}x^2+y^4x,$
$\quad\big|\ -\frac{302526b^2a^3+1382400b^2}{49(2401a^6+9600ba^2)}x^2+(-\frac{17640}{2401a^4+9600b}a^2y^2-\frac{432000}{7(2401ba^4+9600b^2)})x+y^6+\frac{12600}{2401ba^4+9600b^2}a^2y^4,$
$\quad\big|\ y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$

$(-7ayx^2-10y^4x)\partial_x,$

$\quad\big|\ 1, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, x^2, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$

$-7yx^2\partial_x-2y^2x\partial_y,$

$\quad\big|\ 1, \frac{13}{20}ax^2+y^3x, \frac{2535}{343a^3}b^2x^2+(\frac{4500}{539a^3}by^2-\frac{100}{21a^2}y)x+y^5,$
$\quad\big|\ -\frac{270}{49a^2}bx^2-\frac{360}{77a^2}y^2x+y^6, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$

$y^6\partial_y,$	$1, x, (\frac{8}{5}by^2+\frac{14}{5}ay)x+y^4, (\frac{4}{3}by^3+\frac{7}{4}ay^2)x+y^5, \frac{7}{5}ay^3x+y^6,$
	$x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$y^5x\partial_x$	$1, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$y^3x\partial_y,$	$1, x, (\frac{1125}{49a^3}by^2-\frac{150}{7a^2}y)x+y^5, -\frac{90}{7a^2}y^2x+y^6,$
	$y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$y^2x^2\partial_x,$	$1, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$x^2\partial_y,$	$1, x, (\frac{8}{5}by^2+\frac{14}{5}ay)x+y^4, y^3x, \frac{7}{4}ay^2x+y^5, y^6, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$y^4x\partial_y,$	$1, x, -\frac{150}{7a^2}yx+y^5, y^2x, y^6, x^2, y^3x, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$yx^2\partial_y$	$1, x, \frac{14}{5}ayx+y^4, y^5, y^2x, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$x^3\partial_x,$	$1, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^2x, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$y^5x\partial_y,$	$1, x, yx, y^5, y^2x, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$y^2x^2\partial_y,$	$1, x, y^4, yx, y^5, y^2x, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$yx^3\partial_x,$	$1, y, y^2, y^3, y^4, yx, y^5, y^2x, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$x^3\partial_y,$	$1, y^3, x, y^4, yx, y^5, y^2x, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$
$yx^3\partial_y,$	$1, y^2, y^3, x, y^4, yx, y^5, y^2x, y^6, y^3x, x^2, y^4x, yx^2, y^5x, y^2x^2, x^3, yx^3$

右側の計算結果により, $H_\Sigma = \mathrm{Span}\{1, x^3, yx^3\}$ を得る. (ここで, H_Σ の定数でない非自明な関数に関して, $x^3, yx^3 \in \mathrm{Span}\{f \mod I_O, yf \mod I_O\}$ であることを注意しておく.) よって, $Char(\mathcal{D}_X/Ann^{(1)}) = 3 \cdot T^*_{\{O\}}X$ となる. 今, $\mu = 18$, $\tau = 16$ であるから, $\mu - \tau + 1 = 3$ となり, E_{18} は, 予想を満たしていることが確かめられた.

例 6 関数 $f = x^3 + y^{13} + axy^9 + bxy^{10} + cxy^{11}$ は, 原点に E_{24} 型孤立特異点を持つ. f の各変数 x, y に関する偏導関数 f_x, f_y の生成する $\mathcal{O}_{X,O}$ 上のイデアル I_O は, 全次数辞書式順序 $x \succ y$ によるグレブナ基底の計算により, $I_O = \{x^4, (11cy^2 + 10by + 9a)x^3 + 13y^4x^2, y^3x^3, ((-6a^3c^3 + 27a^2b^2c^2 - 18ab^4c + 3b^6)y^2 + (51a^3bc^2 - 18a^2b^3c - 3ab^5)y - 27a^4c^2 + 81a^3b^2c - 27a^2b^4)x^3 + ((78a^3bc - 39a^2b^3)y^3 + (-39a^4c + 39a^3b^2)y^2 - 39a^4by + 39a^5)x^2 + 13a^6y^9, ((18abc - 9b^3)y^2 + (-20a^2c + 9ab^2)y - 19a^2b)x^3 - 13a^2y^3x^2 + 3a^4y^8x\}$ と表すことができる. 任意の $g \in I_O$ を *annihilator* にもつ代数的局所コホモロジー類全体 Σ に対し, D_Σ を計算すると, $\mathbb{C}$ 上の基底として, 次の 28 個の微分作用素を取ることができる.

$$(((14abc - 8b^3)y^2 + (-38a^2b + 8ab^2)y - 28a^2b)x^2 + 104a^2y^3x + 3a^4y^8)\partial_x + 26a^2y^4\partial_y,$$
$$(((81abc - 42b^3)y^2 + (-127a^2c + 42ab^2)y - 122a^2b)x^2 - 104a^2y^3x + 15a^4y^8)\partial_x + 6a^3x\partial_y,$$

$$((-117ac - b^2)y^2 - 99aby - 81a^2)x^2\partial_x + 26ay^5\partial_y, \quad ((11cy^2 + 10by + 9a)x^2 + 13y^4x)\partial_x,$$
$$((2ac - b^2)y^2 + aby + 9a^2)x^2\partial_x + 2a^2yx\partial_y, \quad (-99by^2 - 81ay)x^2\partial_x + 26y^6\partial_y,$$
$$((10by^2 + 9ay)x^2 + 13y^5x)\partial_x, \quad (by^2 + 9ay)x^2\partial_x + 2ay^2x\partial_y,$$

$$-81ay^2x^2\partial_x + 26y^7\partial_y, \quad (9ay^2x^2 + 13y^6x)\partial_x, \quad 9y^2x^2\partial_x + 2y^3x\partial_y,$$

$$y^8\partial_y, \quad y^7x\partial_x, \quad y^4x\partial_y, \quad y^3x^2\partial_x, \quad x^2\partial_y, \quad y^5x\partial_y, \quad yx^2\partial_y, \quad x^3\partial_x, \quad y^6x\partial_y,$$
$$y^2x^2\partial_y, \quad yx^3\partial_x, \quad y^7x\partial_y, \quad y^3x^2\partial_y, \quad y^2x^3\partial_x, \quad x^3\partial_y, \quad yx^3\partial_y, \quad y^2x^3\partial_y.$$

これに対し, H_Σ を求めると, $H_\Sigma = \mathrm{Span}\{1, x^3, yx^3, y^2x^3\}$ となる. ここで, H_Σ の定数でない非自明な関数に関して, $x^3, yx^3, y^2x^3 \in \mathrm{Span}\{f \mod I_O, yf \mod I_O, y^2f \mod I_O\}$ であることを注意しておく.

今, $\mu = 24$, $\tau = 21$ であるから, $\mu - \tau + 1 = \dim H_\Sigma = 4$ が成り立ち, よって, 予想を満たしていることが分かる.

参考文献

[1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps Volume I, Monographs in Mathematics Vol. 82, Birkhäuser, Boston, 1985.

[2] G.M.Gruel, *Dualität in der lokalen Kohomologie isolierter Singularitäten*, Math. Ann. **250** (1980), 157–173.

[3] 中村弥生, 田島慎一, Unimodal 例外型特異点における代数的局所コホモロジー類, 京都大学数理解析研究所講究録「微分方程式の漸近解析・超局所解析」, 掲載予定.

[4] 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について, 京都大学数理解析研究所講究録「数式処理における理論と応用の研究」, 掲載予定.

[5] M. Sebastiani, *Preuve d'une conjecture de Brieskorn*, Manuscripta Math. **2** (1970), 301–308.

[6] K. Saito, *Quasihomogene isolierte singularitäten von hyperflächen*, Invent. Math. **14** (1971), 123–142.

[7] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional local residues and holonomic D-modules*, Sûrikaiseki Kenkyûshokôyûroku, RIMS Kyoto Univ. **1033** (1998), 59–70.

[8] 田島慎一, 代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録「数式処理における理論と応用の研究」, **1138** (2000), 87–95.

[9] 田島慎一, 中村弥生, 擬斉次孤立特異点の標準形に対する双対基底の計算, 京都大学数理解析研究所講究録「D-加群のアルゴリズム」, **1171** (2000), 164–189.